МИНИСТЕРСТВОНАУКИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»(ФГБОУ ВО«КубГУ»)**

**Факультет компьютерных технологий и прикладной математики Кафедра математического моделирования**

# КУРСОВАЯ РАБОТА

**ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Работу выполнил Н.П. Демьяненко

(подпись)

Направление подготовки 01.03.02«Прикладная математика и информатика»

?Направленность (профиль)«Математическое моделирование в естествознании и технологиях»?

Научный руководитель

канд.физ.-мат. наук, доц. А.А. Евдокимов

(подпись)

Нормоконтролер

канд.физ.-мат. наук, доц. С.Е. Рубцов

(подпись)

Краснодар2022РЕФЕРАТ

Курсовая работа 31с., 5ч., 10 рис., 9 источников, 1 прил. (Доделать)

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ.

Объектом исследования являются установившиеся гармонические колебания, возникающие в упругом изотропном слое.

Целью курсовой работы является описание и применение гибридной численно‑аналитической схемы к моделированию процессов возбуждения, распространения и дифракции плоских волн в упругом изотропном слое.

В ходе работы была поставлена задача о возбуждении и распространении гармонических колебаний в волноводе, построена математическая и компьютерная модель. В рамках построенных моделей была описана гибридная численно‑аналитическая схема для решения краевых задач различных видов.

В результате была полученорешение для поставленной задачи при помощи гибридной схемы. На примере прямоугольной выемки был рассчитан коэффициент прохождения для различных набегающих волн, а также проиллюстрирован эффект ловушечных мод.

Областью применения полученных результатов являются различные области науки и техники, например неразрушающий контрольцелостности изделий.

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc104033652)

[1 Постановка задачи 7](#_Toc104033653)

[1.1Физическая постановка задачи 7](#_Toc104033654)

[1.2Математическая постановка задачи 11](#_Toc104033655)

[2 Интегральный подход 13](#_Toc104033656)

[2.1 Построение интегрального представления решения 13](#_Toc104033657)

[2.2 Волновое представление решения 14](#_Toc104033658)

[3 Гибридная численно-аналитическая схема 17](#_Toc104033659)

[4 Верификация 22](#_Toc104033660)

[5 Расчет энергии. Коэффициент прохождения 24](#_Toc104033661)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 29](#_Toc104033662)

[ПРИЛОЖЕНИЕ АКод программы 30](#_Toc104033663)

# ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время во многих областях науки и техники все большую популярность приобретают системы, использующие управляемые поверхностные или объемные волны, возбуждаемые и регистрируемые поверхностными или встроенными в волновод активными пьезосенсорами. Примерами таких систем являются снабженные сетью пьезоактивных элементов оболочки аэрокосмических изделий, системы активного виброгашения и т.п.Использование в таких системах пьезоактивных элементов, выполненных в виде тонких и гибких накладок, практически не сказываются на механических свойствах исследуемого объекта.При этом такие элементы обладают относительно небольшой стоимостью.

Бегущие волны, возбуждаемы в алюминиевых, стальных тонкостенных конструкциях с помощью активных пьезосенсеров, выполненных в виде тонких и гибких накладок, распространяются на большие расстояния и взаимодействуют с неоднородностями любой природы, что позволяет выявлять скрытые дефекты.

Исследование процессов возбуждения (с помощью некоторого источника колебаний) и распространения бегущих волны требует разработки адекватных математических и компьютерных моделей. В рамках курсовой работы, указанные модели были построены с помощью гибридной схемы.Также моделиможно построить с помощью интегрального подхода[1]. Помимо указанных вариантов существуют другие способы решения данной задачи. Одним из наиболее широко распространённых способов и является метод конечных элементов (МКЭ). Данный метод основан на сеточной аппроксимации. МКЭ подходит для решения широкого класса задача.Кроме того, существуютмножество его реализаций в виде коммерческих программных продуктов(Autodesk Simulation, COMSOL Multiphysics, WolframMathematica, Ansys и др.). Однако, несмотря на универсальность и широкое распространение, есть задачи, для которых прямое применение МКЭ оказывается неэффективным или даже невозможным. Одним из таких классов задач являются задачи моделирования волновых процессов. Это связано с необходимостью хранения больших объемов данных в случае трехмерных задач.

Для моделирования протяженных волноводов в рамках МКЭ выделяют ограниченную область, а на границе области вводятся специальные поглощающие граничные условия. Эти условия могут быть выполнены в виде специальной связки напряжений и смещений эмулирующие отток волновой энергии на бесконечности (например, в виде условий Зоммерфельда). Другой пример, это добавление некоторых искусственных областей к основному волноводу, выполненных в виде идеально согласованныхслоев (Perfectlymatchedlayers, PML в зарубежной литературе).

Заметим, что и эти методы имеют свои недостатки. Так условия излучения Зоммерфельда являются в точности неотражающим, но предполагает, что граница бесконечно удалена от источника колебаний, что невозможно при компьютерном моделировании.

PML так же имеет некоторые ограничения. В некоторых задачах, применение идеально согласованного слоя приводит к неизбежным отражениям от границы или даже к экспоненциальному росту, например при возникновении обратных волн. Этот метод является без отражающим только в случае формулирования относительноточного решения рассматриваемого уравнения. Однако, при компьютерном моделировании решение приближенное, что ведет к небольшим отражениям от нее, которые уменьшаются с увеличением точности решения.

Гибридная численно-аналитическая схема лишена такого рода недостатков и позволяет сопрягать численно решение в локальной области с аналитическим решением во внешней области.

Целью курсовой работы является создание математических и компьютерных моделей, а также исследование процессов возбуждения точечными пьезоактуаторамии распространения бегущих волн

**Постановка задачи**

Физическая постановка задачи

Колебания акустической среды удовлетворяют полной системе уравнений гидродинамики. Система уравнений гидродинамики не линейна, но поскольку акустика рассматривает малые колебания среды, то, принимая ряд упрощающих предположений, можно выписать приближенные линейные уравнения. В частности, уравнение Эйлера, при условии отсутствия внешних сил, принимает вид:

где ρ(x) – невозмущенная плотность среды, v(x, t) – скорость частиц относительно неподвижной системы координат, p(x, t) – давление в среде.

Линеаризация уравнения неразрывности гидродинамики приводит к уравнению вида:

Здесь β = 1/ (ρ) – сжимаемость среды, c – скорость продольных волн в акустической среде (скорость звука).

Сформулированные уравнения и составляют полную систему общих линейных уравнений акустики для скорости частиц и давления. Любое частное решение данных уравнений описывает свободную волну в среде. Коэффициенты сжимаемости и невозмущенной плотности могут быть как константами для всех точек среды (тогда говорят, что акустическая среда однородна), так и непрерывно зависеть от координаты.

Предположим, что ρ и β не зависят от координат, продифференцируем уравнение по времени, поменяем порядок дифференцирования по времени и по координате и подставим выражение для ускорения из уравнения, в итоге получим волновое уравнение для давления

Если решение для какой-либо задачи найдено, то скорости частиц определяются из соотношений вида:

Здесь – распределение скоростей в начальный момент времени = 0. Волновое уравнение справедливо для однородных сред и для некоторых неоднородных сред. Если только сжимаемость β зависит от координат, а плотность ρ не зависит, то волновое уравнение сохранит свою форму. При этом от координат будет зависеть величина c, которая потеряет смысл скорости звука в среде, т. к. в подобных средах волны при распространении не сохраняют свою форму.

Начальные условия формулируются в виде:

где , – начальные скорости и давления, а V – область пространства занимаемое акустической средой. В дальнейшем предположим, что = 0 и = 0.

Граничные условия для акустической средыформулируются в виде:

Здесь S = ∪ = ∂V – поверхность раздела акустической среды с другими телами, а n – единичная внешняя нормаль к поверхности.

Если на какой-то части поверхности (или на всей) выполняется равенство при = 0, то такая часть поверхности называется абсолютно жесткой. Граничные условия вида, где = 0 возникают, например, на границе с вакуумом или газом, если давление газа не слишком велико. Поверхность в таком случае называется абсолютно мягкой границей.

В случае установившихся гармонических колебаний p (x, t) = (x)уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца

∆+ = 0, =

Граничные условия для установившихся гармонических колебаний по форме остаются прежними, где v = −1/ρ∇p. Как и ранее, для упругих тел в случае установившихся гармонических колебаний к граничным условиям добавляются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения.

Математическая постановка задачи

P – функция, характеризующая давление в точке

– круговая частота

C – Скорость звука

–Дельта-функция Дирака

**Интегральное представление решения**

P(x,y,z,t) удовлетворяет следующей краевой задаче:

Где P – функция, характеризующая давление в точке, – круговая частота, C – Скорость звука, – Дельта-функция Дирака

В рамках интегрального подхода производится гармоническая замена. В силу линейности краевой задачи, уравнения и граничные условия могут быть переформулированы относительной комплексных амплитуд смещений :

Геометрия краевой задачи позволяет применить преобразование Фурье вдоль оси . В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для прямого преобразования Фурье:

и обратного преобразование Фурье:

В таком случае краевая задача может быть записана в следующем виде:

Данная краевая задача получена согласно свойствам преобразования Фурье:

= =

+ )= + (+

Получим:

+()P(,z)=0

Уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Его решение может быть получено в следующем виде:

В таком случае общее решение уравнения может быть записано в следующем виде:

Здесь и – неизвестные константы, которые могут быть найдены исходя из граничных условий.

Используя метод Крамера, найдем и :

В таком случае решение краевой задачи в Фурье-образах может быть записано в следующем виде:

Применяя обратное преобразование Фурье получим решение краевой задачи:

**Заключение**

В ходе курсовой работы рассмотрены колебания акустической среды. Построено решение исходной краевой задачи в рамках интегрального подхода в виде свертки Фурье-символа матрицы Грина и внешней нагрузки. В дальнейшем планируется построение численного решения и сопоставление с результатами других подходов.